

平成 17 年度知能システム科学専攻修士論文

Simplex-type スライディングモード制御に関する研究

猪股 聡史

Research of simplex-type sliding mode control

Satoshi Inomata

提出年月日 2005 年 2 月 26 日

主査教官 山村雅幸教授

審査教官 山村雅幸教授

審査教官 村田智助教授

審査教官 伊藤宏司教授

Simplex-type スライディングモード制御に関する研究

猪股 聡史

Research of Simplex-type sliding mode control

Abstract

In this paper, we propose a new control law of simplex-type sliding mode control (simplex SMC) of that design procedure does not depend on an initial value. In addition, the area that becomes asymptotically stable when controller of whom outputs are constrained is verified.

The method to decide the magnitude of control vector that ensure the system reach sliding mode in finite time are proposed. Simplex SMC is one of the variable structure control systems, and based on sliding mode control (SMC). Simplex SMC has an advantage in the point of easiness of design compared with conventional SMC. However, typically simplex SMC depends its designing procedure on initial value of system. It interfere the simplex SMC become widely used. To overcome this defect, we improve magnitude of control law to change itself in proportion to norm of σ . Its designed for the purpose of system is asymptotically stable when transient state.

Other research is considered when outputs of controller are limited. From a Lyapunov function standpoint, we find the area where initial value should be put.

1 はじめに

近年のロバスト制御理論の発展はめざましいものがあり、これまで問題視されてきた理論と応用との乖離も解消しつつある。その中で、非線形ロバスト理論という枠組みにおいて代表的な理論に可変構造制御理論がある。可変構造制御理論はシステムの状態によって制御系の構造を変える理論であり、その中で最も体系化され研究されているのがスライディングモード制御理論である。スライディングモード制御は線形系の他に非線形系、パラメータ変動系、時変系など、モデル化誤差や未知外乱に対するロバスト性を積極的に確保することができるという特徴を持つ。これまでスライディングモード制御は高速なスイッチングを要し、さらにはそれに伴うチャタリングなどの発生もあって実システムへの適用は行われてこなかった。しかし、近年のコンピュータとアクチュエータの発達、さらには高度に体系化された理論の成熟などにより、実システムへの適応がさかんに行われるようになってきた [6]。

スライディングモードとは、状態の軌道が滑り

面 (sliding surface) と呼ばれる面上に拘束されながら滑っている状態を示す。滑り面では基本的に出力の切り替え (スイッチング) が連続的に起こっている。このとき、状態が滑り面にたどり着く条件を到達条件 (reaching condition) と呼ぶ。この制御は状態を任意の滑り面に到達させることで、希望する動特性を与えることを目的とする。従って、スライディングモード制御は

- 希望する動特性を与える滑り面の設計
- 滑り面に到達するための制御則の設計

という二つの設計が存在する。基本的な設計手順として、要求する動特性を満たす滑り面を設計し、それをを用いて制御側を設計するという方法が一般的である。

本論文では、スライディングモード制御の拡張である simplex-type スライディングモード制御を取り扱う。まず、この制御が抱える初期値依存性を解消する方法を提案し、次に制御出力に制限があった場合の制御可能領域について考察を行う。

2 simplex-type スライディングモード制御とその問題点

ここではまず一般的なスライディングモード制御 (以下, SMC) について述べる. いま, 次のような線形システムを考える.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1)$$

$$\sigma = Sx \quad (2.2)$$

$$u = f(\sigma) \quad (2.3)$$

ここで, σ は切り替え超平面であり, S はそれを決定するマトリックスである. 制御出力 u は σ によって決定し, 一般的には $f(\sigma)$ の符号によって制御則を切り替える. Fig.2.1 ではフィードバックゲインを切り替えることにより SMC を実現している. 一般的に SMC は, 制御が切り替わる境界

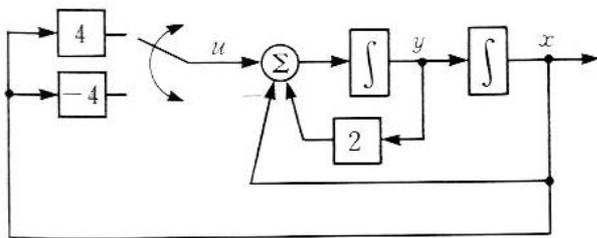


Fig. 2.1 制御器切り替えによるスライディングモード制御 [6]

線上に拘束される. それを滑り面と呼び, 滑り面同士が交差する線を切り替え線と呼ぶ. SMC では, 出力の次元数 m に対して 2^m 個に状態空間が分割される. Fig.2.2 にスライディングモードと滑り面の幾何学的な解釈を示す.

SMC の一種である simplex type スライディングモード制御は (以下, simplex SMC) Izosimov らによって提案された [2]. この制御は出力ベクトルによって構成される simplex という制御単位を持つ. そして制御則は状態が所属する領域によっ

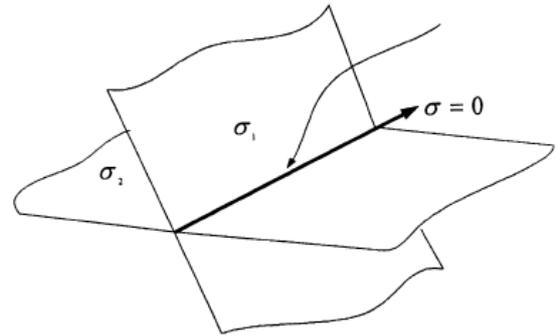


Fig. 2.2 滑り面の幾何学的解釈 [3]

て決定し, 制御量はその空間が属する制御ベクトルを用いる. Fig.2.3 に simplex SMC の概要を示す. simplex SMC は従来の状態空間上での切り替

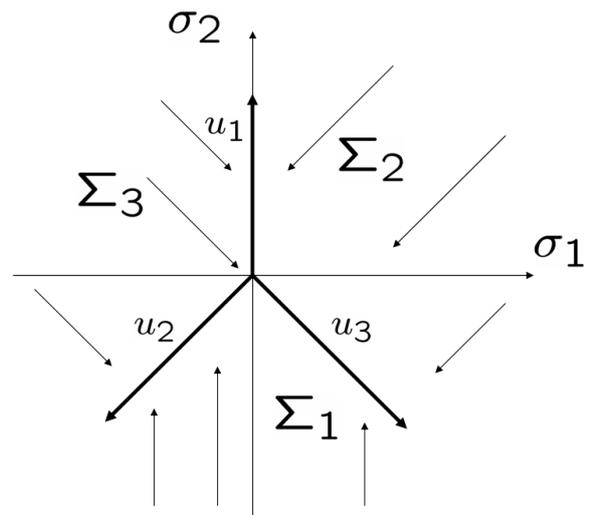


Fig. 2.3 Simplex スライディングモード制御の概要

えに代わって, 切り替え面 σ 空間上の軌跡を元に制御を組み立てていく. 一般的に simplex SMC は制御則の設計が極めて容易である. 従来の SMC は出力の次元を m としたとき, 切り替えに伴う状態空間の分割数が 2^m になるのに対し, simplex SMC は分割数が $m+1$ ですむ. これは切り替えの回数を少なくし, チャタリングなどの問題に対して有効である. さらに, 後述するが出力値に制約

(限界)があった場合,初期値がある範囲内なら安定化することができるという保証を与えることができる.このように多くの利点が simplex SMC にはあるが,従来の手法では制御ベクトルの設計が初期値に依存するなど実問題に応用するにあたって欠点があった.本論文では初期値に依存しない制御則の設計を提案し,出力に制約がある場合に関する考察を行っている.

いま,システムは状態方程式と切り替え面によって

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.4)$$

$$\sigma = \mathbf{S}\mathbf{x} \quad (2.5)$$

で表されるとする. simplex SMC は切り替え関数 σ によって定義された空間内での軌跡を基に制御側を決定する. 図中の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ はそれぞれ制御ベクトルであり, その集合を simplex $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m+1}\}$ と呼ぶ. \mathbf{U} は互いに線形独立であり, $\sum_{i=1}^{m+1} \psi_i = 1$ を満たす正の定数 ψ を用いて, $\sum_{i=1}^{m+1} \psi_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ を満たすことができる \mathbf{u}_i の組み合わせによって構成される. simplex SMC では, 時刻 t における $\sigma(t)$ が所属する領域によって制御ベクトルが決定される. 例えば Fig.2.3 において, Σ_2 に現在の $\sigma(t)$ が所属する場合, 出力ベクトルはその領域において平衡点へと進む \mathbf{u}_2 となる. すなわち

$$\mathbf{u} = f(\sigma) = \begin{cases} \mathbf{u}_i, & \sigma \in \Sigma_i \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (2.6)$$

が一般的な simplex SMC の制御則となる.

simplex SMC では, 以下に示す条件下での定理が存在する.

条件 1 ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ は開ループシステム $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ の不安定部分空間に切り替え面が属さないようにしなければならない (i.e. \mathbf{A} の固有ベクトルに属さない).

条件 2 状態 \mathbf{x} が全ての時間 $t \geq 0$ において

$$-\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m+1} k_i \mathbf{u}_i, \quad k_i > 0 \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} k_i = \xi, \quad 0 \leq \xi < 1 \quad (2.8)$$

を満たす実数 $k_i(x, \mathbf{u}_i, t)$ と ξ が存在する.

定理 1 もし, $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m+1}\}$ が条件 1 と条件 2 を満たしているのならば, 状態は超平面 $\sigma = \mathbf{S}\mathbf{x} = 0$ 上のスライディングモードに有限時間内に到達する.

以上が simplex SMC が超平面に有限時間に達する条件である. 一旦, システムがスライディングモードに到達するとその動力学は

$$\dot{\mathbf{x}}_r = (\mathbf{A}_r - \mathbf{B}_r \mathbf{M})\mathbf{x}_r \quad (2.9)$$

と表される. ここで \mathbf{H} と滑り面マトリックス \mathbf{S} は

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{H}^\dagger \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{B} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{B} = 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}^\dagger + \mathbf{M}\mathbf{H} \quad (2.12)$$

として設計される. ここで, $\mathbf{B}^\dagger, \mathbf{H}^\dagger$ は擬似逆行列である.

定理 2 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) が可制御対のとき, $(\mathbf{A}_r - \mathbf{B}_r \mathbf{M})$ の固有値が負になるような \mathbf{M} を設計すれば, システムは安定切り替え面 $\sigma = \mathbf{S}\mathbf{x} = 0$ に到達する.

以上により, システム $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ は条件 1, 2 を満たしているならば, 有限時間内に安定滑り面に到達して平衡点に達する.

simplex SMC の欠点 simplex SMC は従来のスライディングモード制御に比べて状態空間数の分割数が少なくなる. これは切り替えが少なくなることを意味し, チャタリングや実装上の問題などを緩和する効果を持っている. しかし, simplex

SMC の成立条件に「状態の軌道が任意の空間内に全ての時刻において存在すること」という条件 (条件 2) が、この利点を帳消しにしている。これは制御ベクトル群 $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m+1}\}$ の設計を、初期値から推測して設計しなければならないことを意味している。その対策として、初期値によって軌道が到達する σ 空間での最大半径を求め、それにより制御ベクトルの大きさを決定する方法などが提案されてきたが [1], それでもシステムの初期値に設計が依存するような制御システムの構築は大きなネックとなっている。

3 初期値依存のない simplex SMC の提案

ここまで述べてきた欠点を克服するために、その安定性が初期値依存をしない出力方式を考える。いま, simplex SMC の制御出力を

$$u = f(\mathbf{x}) = \begin{cases} g(\mathbf{x})\mathbf{u}_i, & \sigma \in \Sigma_i \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (3.1)$$

として再定義する。ここで, simplex \mathbf{U} は単位ベクトルによって構成し

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m+1}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{m+1}\} \quad (3.2)$$

とする。simplex SMC の初期値依存性は、前節で述べた条件 2 が原因である。そこで、全ての状態 \mathbf{x} に対して条件 2 が成立するように関数 $g(\mathbf{x})$ を設計する。すなわち、状態 \mathbf{x} が全ての時間 $t \geq 0$ において

$$-\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x} = g(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{m+1} k_i \mathbf{e}_i, \quad k_i > 0 \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} k_i = \xi, \quad 0 \leq \xi < 1 \quad (3.4)$$

を満たす実数 $k_i(x, u_i, t)$ と ξ が存在するような $g(\mathbf{x})$ を決定する。

いま,

$$-\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x} = m\mathbf{v} \quad (3.5)$$

を考える。ここで \mathbf{v} はベクトル $-\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}$ を構成するベクトルであり,

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m+1} k_i \mathbf{e}_i \quad (3.6)$$

として、任意の k によって表現できる最小単位のベクトルである。式 (3.5), (3.6) を式 (3.3) に代入すると

$$m\mathbf{v} = g(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (3.7)$$

が得られる。これより、全ての \mathbf{x} に対して

$$g(\mathbf{x}) \geq m \quad (3.8)$$

となるような $g(\mathbf{x})$ を設定してやればよいことが分かる。 \mathbf{v} は

$$\mathbf{v} = \frac{\alpha}{\|-\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}\|} (-\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

として書ける (α は定数)。式 (3.5) に式 (3.9) を代入すると

$$\begin{aligned} -\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \frac{m\alpha}{\|-\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}\|} (-\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \frac{m\alpha}{\|\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}\|} (\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}) \\ (\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x})^\dagger (\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}) &= \frac{m\alpha}{\|\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}\|} \\ \frac{m\alpha}{\|\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}\|} &= 1 \\ m &= \frac{\|\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.10)$$

が得られるので、これを式 (3.8) に代入して

$$g(\mathbf{x}) \geq \frac{\|\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\alpha} \quad (3.11)$$

が得られる。これより、例えば

$$g(\mathbf{x}) = K\|\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}\| \quad K \geq 1/\alpha \quad (3.12)$$

とすれば全ての \mathbf{x} で式 (3.3) を満たす。ここで、 $g(\mathbf{x})$ を σ の関数とする。 $\sigma = \mathbf{S}\mathbf{x}$ より、 $\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^\dagger \sigma$ となるので、式 (3.12) は

$$g(\sigma) = K\|\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^\dagger \sigma\| \quad K \geq 1/\alpha \quad (3.13)$$

と書き換えることができる。このとき、システムは有限時間内にスライディングモードに到達する。付録 A にてその証明を行う。

定数 α の決定 定数 α はシンプレックスによって構成される凸面体内にベクトル $-\frac{\alpha}{|SAx|}SAx$ が含まれるように決定される (Fig.3.1) . すなわち ,

として表され , 用いるシンプレックスは $u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1), u_3 = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ である . 滑り面 S における指定極

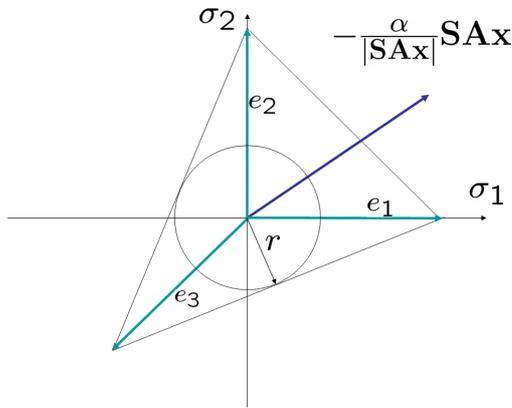


Fig. 3.1 定数 α の決定

σ 領域における原点を中心とした半径 r の超球が , 凸面体内に内接するように α を設計する .

この提案手法により , 従来と違う初期値に依存しない制御を実現することが可能となる .

4 数値実験

従来の simplex SMC と Ta-Tau らが提案するスケール関数を用いる方法 [4] 及び提案手法についてそれぞれ評価実験を行った . 実験に使用したモデルはヘリコプターの姿勢制御モデルであり , 線形近似化されたモデルである [3] . システムの状態方程式は

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.010 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.707 & 1.420 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.442 & 0.1761 \\ 3.5447 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.99 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.1 実験 1: 従来の simplex SMC

初期に提案された simplex SMC では , チャタリングの発生が極めて大きくそれ単体での使用は制御を実現することは困難である . また , 制御ベクトルの大きさ (スケール関数と呼ぶ) の決定にも大きく依存する . 初期値を $x_1 = -0.2, x_2 = 1.0, x_3 = 0.1, x_4 = 1$ として , スケール関数を 20 としたときの σ 領域での軌跡 , 及び各状態の時間軸における推移を Fig.4.1, Fig.4.2 に示す . この図を見ると , 大きなチャタリングによって

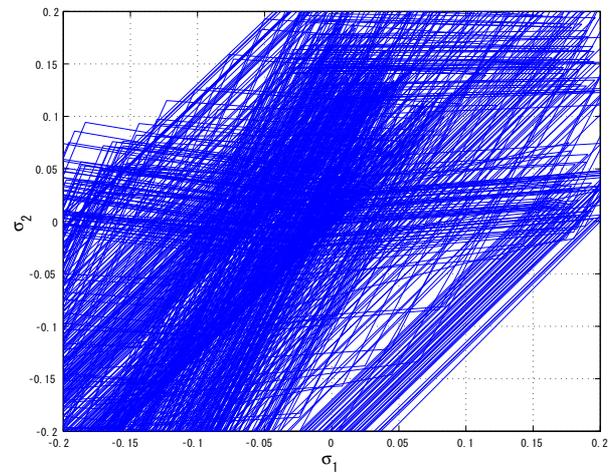


Fig. 4.1 simplex SMC による σ 領域での軌跡

σ はシンプレックスに拘束されず , 制御自体も実現しているとは言い難い . その対策として , 一般に切替面近くに到達するに連れて制御入力を低くする手法が考案されてきた [3]-[5] (ただ , これらは大域的な安定性に関しては考えていない) . その中の一つであるスケール関数を用いた方法について実験を行う .

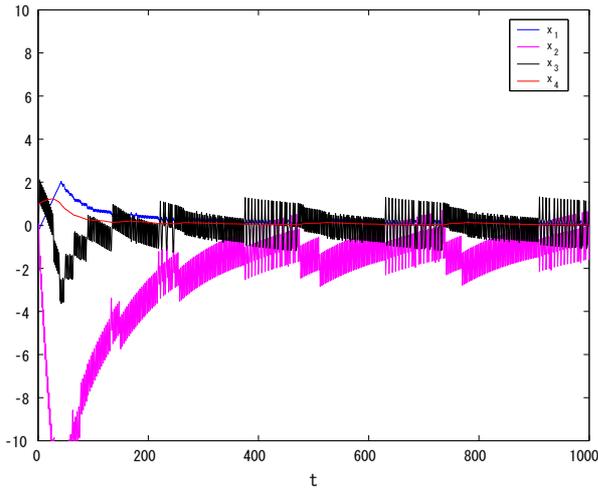


Fig. 4.2 時間領域における状態遷移

4.2 実験 2: スケーリング関数を用いた simplex SMC

チャタリング防止策の一般的なアイデアは、切替面に状態が近づくにつれて出力を弱くするというものである。その方法として、ファジィを使ったり切替面からの距離を用いたりする方法がある。ここでは Ta-Tau らが考案するスケーリング関数を用いた手法について実験をする。この手法は

$$scl(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \|\sigma\| > \epsilon \\ \phi & \text{if } \|\sigma\| \leq \epsilon \end{cases} \quad (4.2)$$

という関数を設定し、出力を

$$u = f(\sigma) = \begin{cases} scl(\sigma)u_i, & \sigma \in \Sigma_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.3)$$

と決定する。これは、 $\|\sigma\|$ の値がある閾値 ϵ を下回った場合に出力を弱くするという方法で、チャタリング防止のために考案された。

ここでは $\epsilon = 0.5, \phi = 0.1$ として実験を行った。モデルと初期値は実験 1 と同じである。

Fig.4.3, Fig.4.4 にその結果を示す。これより、チャタリング防止機能がうまく働いていて制御も実現していることが分かる。

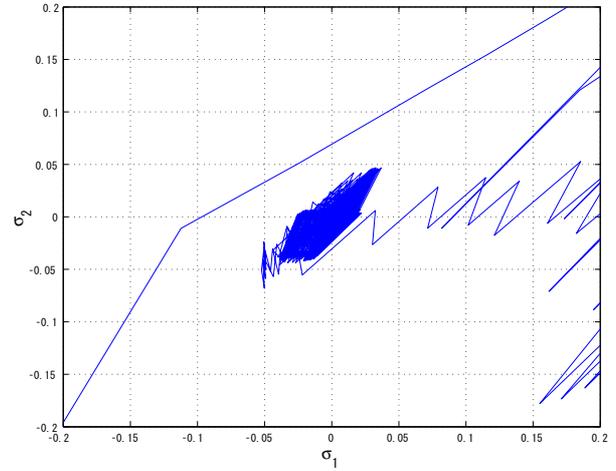


Fig. 4.3 scl 関数を用いた simplex SMC による σ 領域での軌跡

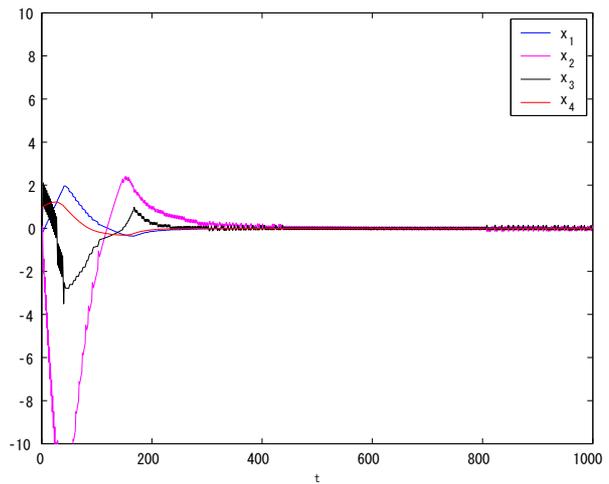


Fig. 4.4 時間領域での状態推移

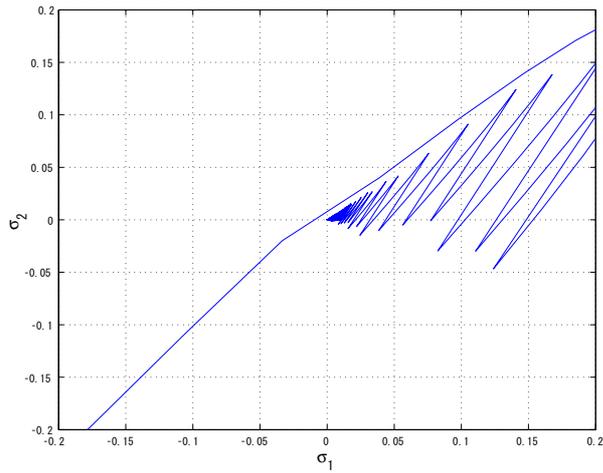


Fig. 4.5 提案手法による σ 領域での軌跡

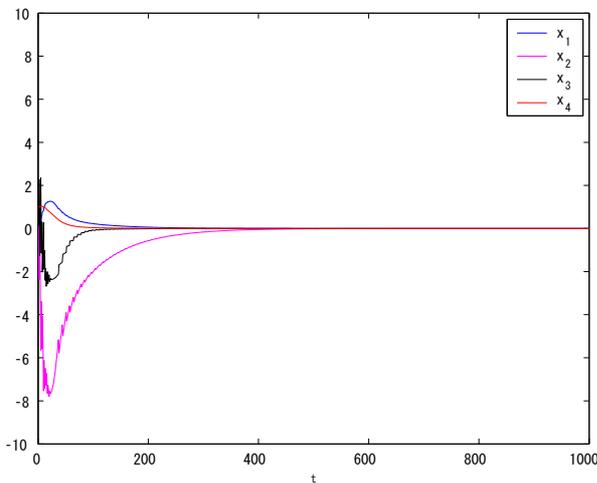


Fig. 4.6 時間領域での状態推移

4.3 実験 3:提案手法による制御

同様に提案手法についても評価実験を行った。

実験で用いる定数 K は $1/\alpha = 2.7979$ により $K = 2.8$ とした。実験結果を Fig.4.5, Fig.4.6 に示す。これより、提案手法はチャタリングが発生せず、速やかに収束していることが分かる。

4.4 実験 4:初期値による収束比較

チャタリングを低減する方法はこれまで様々な形で提案されてきているが、大域的に収束を保障する方法についてはこれまで述べられてこなかった。

一般的な simplex SMC は初期値に大きく依存し、その条件も厳しい。ここでは、初期値によって各手法による制御がどのようになるかを比較した。実験で使用した初期値は、前の実験で使用したものの値の 10 倍 ($x_1 = -2, x_2 = 10, x_3 = 1, x_4 = 10$) とした。その結果、提案手法以外はスケーリングファクタをどのように変えても収束に至らずに発散した。Fig.4.7 に提案手法の各状態が収束に至

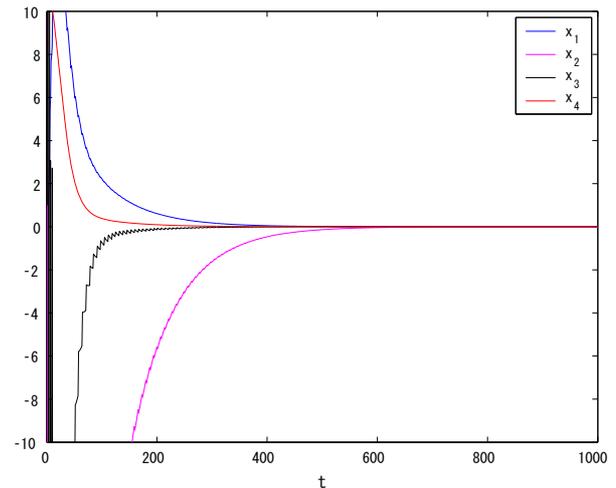


Fig. 4.7 時間領域での状態推移

る様子を示す。これにより、提案手法は初期値に依存しないことが実験からも証明された。

5 出力の制約下における制御

前章では大域的な安定性を確保した手法を提案し、実験及び考察を行った。本章では、条件 2 を拡張させることにより、出力が飽和状態にあっても漸近安定となるような σ 領域における初期状態の制御可能領域を考察し、その数値実験を行う。

simplex SMC は制御の過渡状態において、その安定性を得るために常に条件 2 を満たす必要があった。すなわち σ 空間内において、状態の全軌跡が制御ベクトルによって構成される凸面体内に収まっている必要がある。言い換えると、制御可能な初期値の範囲は、制御ベクトルの長さ(出力量)によって決定される。これは出力量に上限が

設けられていた場合における制御可能範囲を得る一つの指標として用いることが可能である。billらは制御中における状態を全て包含する領域を導き出した [1]. いま, システムが式 (2.1)-(2.3) で表され, 状態の初期値 $x(0)$ が $\|x(0)\| < r_e$ を満たすとする. この時, 次の定理が成り立つ.

定理 3 行列 $\tilde{S}A$ の特異値が全て 1 となるような行列 \tilde{S} を定義する. \tilde{S} における特異値の最大・最小値をそれぞれ $\sigma_{max}(\tilde{S}), \sigma_{min}(\tilde{S})$ として

$$k = m \frac{\sigma_{max}(\tilde{S})}{\sigma_{min}(\tilde{S})} \quad (5.1)$$

とする.

このとき, システムは全ての時間 $t > 0$ において $\|x(t)\| < kr_e$ となる (図 5.1).

従って, シンプレックス U が構成する凸面体の

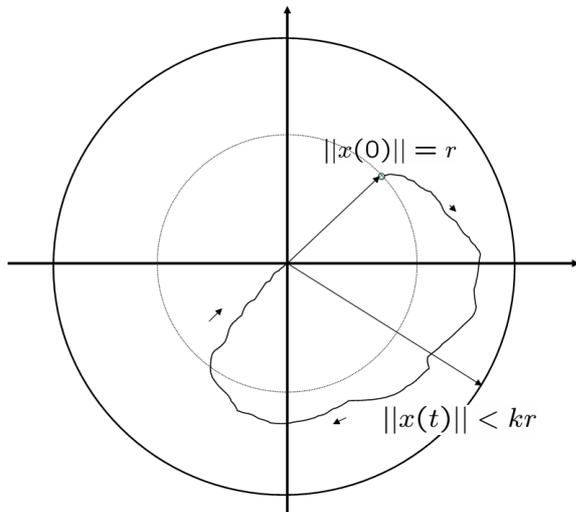


Fig. 5.1 $\|x(t)\|$ の包含領域

半径を r とすれば

$$r > kr_e \quad (5.2)$$

を満たすとき, 制御は $t > 0$ の全ての状態において漸近安定である. すなわち, 半径 r の超球内部

がシステムの漸近安定が確保されるエリアである. 次節では, これをふまえて制御可能領域の拡張を行う.

5.1 制御可能領域の拡張

これまででは, 軌跡 $-SAx$ は全て条件 2 を満たすという仮定の下での議論であった. いま, 2 出力系において状態が Σ_1 領域にあったとする. そのとき, リヤプノフ関数 $\dot{\beta}$ は

$$\dot{\beta} = -(1 - \xi) - (1 - k_1) \left(1 + \sum_{i=2}^3 \gamma \right) < 0 \quad (5.3)$$

となる. これは全ての領域に当てはめることができ, 条件 2 は $0 \leq \xi < 1$ を指定しているため, リアプノフ関数 $\dot{\beta}$ は負となるのだが, ここでは $\xi \geq 1$ の場合について考える. これはすなわち, 状態がシンプレックスの内接円の外にある場合である. いま, $\xi \geq 1$ を満たす任意の状態 x^* について考える. 式 (2.7) にこれを代入すると

$$-SAx^* = \sum_{i=1}^{m+1} k_i u_i \quad (5.4)$$

ここで $V = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n], K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]^T$ とすれば

$$\begin{aligned} -SAx^* &= VK \\ K &= -V^\dagger SAx^* \end{aligned} \quad (5.5)$$

が得られる. いま, K の各要素を k_i としたときに,

$$\varsigma = \sum_{i=1}^n k_i$$

を定義する. このとき

$$\text{grad } \varsigma = \left(\frac{\partial k_1}{\partial x_1}, \frac{\partial k_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial k_n}{\partial x_n} \right) \quad (5.6)$$

となる. ここで, $\text{grad } \varsigma$ の各要素は状態 x_i の線形結合によって表現されているため

$$\text{rank}(\text{grad } \varsigma) = m - 1 \quad (5.7)$$

が得られる．これはすなわち， K に 1 の自由度があることを意味する．

そこでいま， $k_1 = 0$ とする．そのとき $\dot{\beta}$ は

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= -(1 - \xi) - (1 - k_1) \left(1 + \sum_{i=2}^3 \gamma_i \right) \\ &= -2 + \xi - \sum_{i=2}^3 \gamma_i\end{aligned}$$

となる． γ は出力 \mathbf{u} 同士の線形結合係数を表しており，この場合

$$-\sum_{i=2}^3 \gamma_i u_i = u_1$$

となる．これは出力によって構成されるシンプレックス U に依存し，定数である．従って $\dot{\beta}$ は唯一 ξ に依存し

$$\dot{\beta} = f(\xi) = -2 + \xi - \sum_{i=2}^3 \gamma_i < 0 \quad (5.8)$$

を満たすとき，システムは漸近安定となる．これは状態が Σ_1 領域にあった場合の漸近安定性についてである．全ての領域において漸近安定性を確保するためには， $\sum_{i=1, i \neq j}^{m+1} \gamma_i$ が最小となる任意の領域 Σ_j において漸近安定となればよい．これは制御出力が m 次元の場合でも同等に扱うことができる．従って，従来の条件 2 を次のように拡張する．

条件 2'

$$-\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m+1} k_i u_i, k_i > 0 \quad (5.9)$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} k_i = \xi \quad (5.10)$$

$$0 \leq \xi < 2 + \min \left(\sum_{i=1, i \neq j}^{m+1} \gamma_i \right) \quad (5.11)$$

を満たす実数 $k_i(x, u_i, t)$ と ξ が存在する．

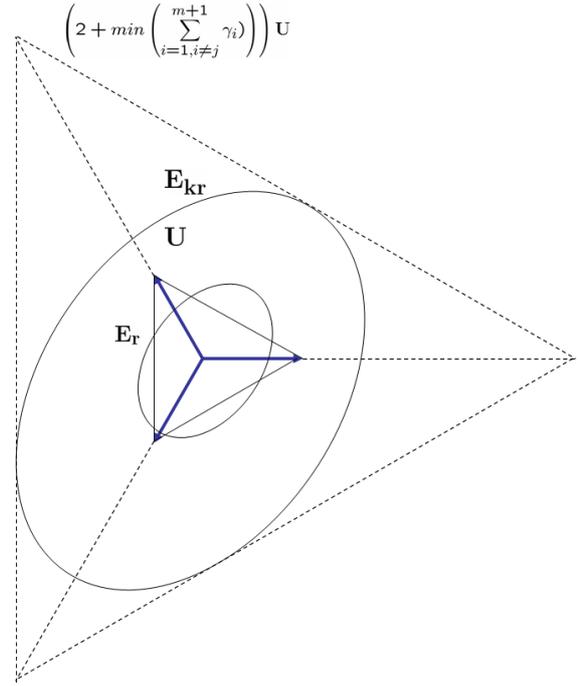


Fig. 5.2 制御出力制約下における制御可能領域

条件 2' と定理 3 より，全ての状態において漸近安定となる初期値領域が導かれる（定理 3 は x 領域におけるノルムを扱っているので， $\sigma = Sx$ の変換を実際に行う）．Fig.5.2 に出力と，制御に漸近安定性を与える初期値の配置エリアとの関係を示す． x 領域における半径 kr の超球を， σ 領域に写像したときにできる像を E_{kr} とする．このとき，シンプレックス U を $2 + \min \left(\sum_{i=1, i \neq j}^{m+1} \gamma_i \right)$ のスケールで拡大させた相似凸面体が， E_{kr} を包含すれば $x(t)$ は E_{kr} 内に必ず収まり漸近安定となる．従って，制御出力値にある制約があった場合には，そこから制御が可能となる初期値領域を算出することができる．

5.2 数値例

前節で示した結果を用いて，出力が飽和する場合における検証実験を行った．実験に用いたシステムとパラメータは第 4 章で用いたものと同じであり，2 入力 4 出力の線形システムである．シンプレックスを構成する出力は $u_1 = (1, 0), u_2 =$

$k = m \frac{\sigma_{max} \dot{S}}{\sigma_{min} \dot{S}}$	3.26
$2 + \sum_{i=2}^3 \gamma_i$	4
$u1_{max}$	100
$u1_{min}$	-100
$u2_{max}$	100
$u2_{min}$	-100

Table 5.1 各パラメータ

$(-1/2, -\sqrt{3}/2), u_3 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ とし, 第3章で提案した手法を用いる. これは制御可能領域が最も広くなる組み合わせである. 2つの出力値にはそれぞれ上限, 下限を持たせた. Table 5.1 に各パラメータを示す. 図より, 制御可能領域は $\|\sigma\| < 61.35$ であることが分かる.

Fig. 5.3 に時間領域における出力, Fig. 5.4 に時間領域における各状態の推移を示す. 制御開始の初期段階では, 制御器の出力値は限界まで達している. このとき σ がある領域は, 従来は安定性の保証はなかった領域である. この実験から, 制御出力は最初飽和するが, 最終的には制御は成功していることが分かる.

6 結論

本論文では, Simplex SMC の初期値依存性を解消する手法, 及び出力に制限がある場合の制御可能領域の決定法を提案した. Simplex SMC は従来の SMC と比べ, 出力の次元に対する状態空間の分割数が少なくなるという特徴を持つ. しかし従来の手法では, 制御の安定性が初期値に依存するという問題があった. 提案手法は全ての状態に対して漸近安定となるような制御則を, リヤプノフ関数を用いた安定判別の観点から設計した. それによって得られた制御則はフィードバック制御の一種とみなすことができる. さらに, 提案手法には SMC がかかえる高周波の振動, チャタリングを低減させる効果も併せて持つ. これを用い

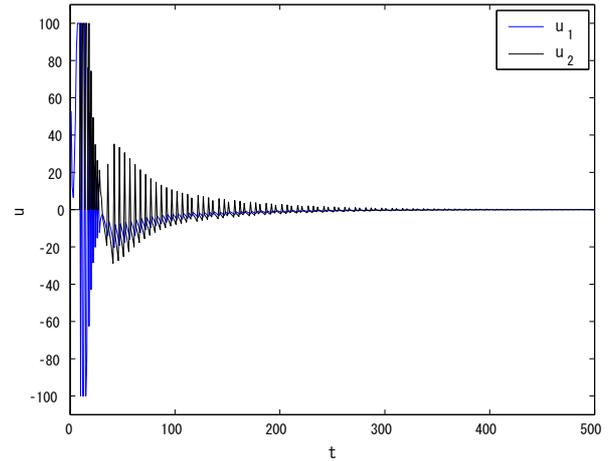


Fig. 5.3 時間領域における出力

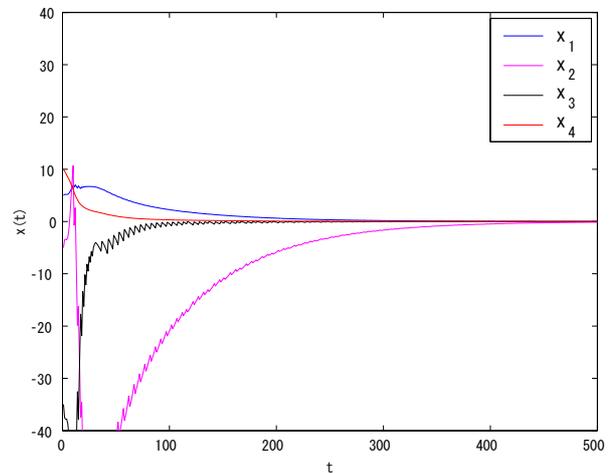


Fig. 5.4 時間領域における各状態

ることにより, 従来手法に比べて収束性, 安定性において優れた結果を残すことができた.

Simplex SMC は出力で構成されるシンプレックスによって, 制御可能領域が決定される. 言い換えると, アクチュエータの性能によって制御が可能か否かが判断できる. これも Simplex SMC の利点である. 本論文では, 安定性を証明する従来のリヤプノフ関数に存在する余裕を切り捨てることによって, より広範囲にわたる安定性の確保を実現している. これを用いることにより, 出力が飽和する場合の制御に対する漸近安定性を保証することが可能となった.

今後の課題としては，非線形システムに対する
適応などが望まれる．

謝辞

本研究を遂行するにあたり，様々な貴重な意見を頂きました山村雅幸教授に心より感謝いたします．また，多岐に渡る刺激的な話題を提供してくれた研究室の方々にも同じく，感謝します．私の研究は現在の形に落ち着くまでに，様々な修正，及び変更がありました．これら試行錯誤の中で，実際に成果がでなかったものも多数ありました．しかし，そこで未熟ながら考え抜いた過程は，今にしてみれば決して無駄なことではなかったと思います．そうすることを推奨してくれた研究室全体の方針にも，心より感謝したいと思います．

参考文献

- [1] Bill M.Diong. On designing the control vectors in simplex-type sliding mode control systems. *American Control Conference*, pp. 2150–2154, 1997.
- [2] D.B.Izosimov S.V.Daida. Vector method of design of sliding motion and simplex algorithms. *Automat. Remote Control*, Vol. 46, pp. 830–837, 1985.
- [3] Tzuu-Hseng Ta-Tau Chen. Simplex-type fuzzy sliding-mode control. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 124, No. 2, pp. 249–261, 2001.
- [4] Tzuu-Hseng S.li Ta-Tau Chen. Study of simplex-type sliding-mode control. Master's thesis, National Cheng Kung University, 2003.
- [5] GuanRong Chen Normal P.Coleman Zhao Lu, Leang-San Shieh. Simplex sliding mode control for nonlinear uncertain systems via chaos optimization. *Chaos, Solutions and Fractals*, Vol. 23, pp. 747–755, 2005.
- [6] 野波健蔵, 田宏奇. スライディングモード制御-非線形ロバスト制御の設計理論-. コロナ社, 1994.

付 図

2.1	制御器切り替えによるスライディングモード制御 [6]	2
2.2	滑り面の幾何学的解釈 [3]	2
2.3	Simplex スライディングモード制御の概要	2
3.1	定数 α の決定	5
4.1	simplex SMC による σ 領域での軌跡	5
4.2	時間領域における状態遷移	6
4.3	sel 関数を用いた simplex SMC による σ 領域での軌跡	6
4.4	時間領域での状態推移	6
4.5	提案手法による σ 領域での軌跡	7
4.6	時間領域での状態推移	7
4.7	時間領域での状態推移	7
5.1	$\ x(t)\ $ の包含領域	8
5.2	制御出力制約下における制御可能領域	9
5.3	時間領域における出力	10
5.4	時間領域における各状態	10

付 表

5.1 各パラメータ	10
------------------	----

A 定理1の証明

いま, m 次元の σ 領域を

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m+1} \phi_i u_i \quad \sum_{i=1}^{m+1} \phi_i = d \quad \phi_i \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

と定義する. もし d が十分に大きかったら, 全領域はシンプレックス U に含まれることになり,

$$\sum_{i=1}^{m+1} \psi_i u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{m+1} \psi_i = 1 \quad \psi_i > 0 \quad (\text{A.2})$$

も得られる.

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m+1} (\psi_i - \alpha \phi_i) u_i = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i u_i \quad \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = \beta$$

ここで $\lambda_i = \psi_i - \alpha \phi_i, \beta = d - \alpha$ である. いま, 全ての λ_i が 0 以上になる最大の α を仮定する. これは $\lambda_j = 0$ を満たす任意の $j \in [1, m+1]$ が存在することを意味する. これより

$$\sigma = \sum_{i=1, i \neq j}^{m+1} \lambda_i u_i \quad \sum_{i=1, i \neq j}^{m+1} \lambda_i = \beta \quad \lambda_i \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

となることが分かる. 幾何学的な観点から, これは領域 Σ_j を意味していることが分かる. ここで $\beta(\sigma)$ に着目してみる. これは, 全ての $\sigma \neq 0$ において, $\beta(\sigma) > 0, \sigma = 0$ において $\beta(\sigma) = 0$ となる. 従って, これはリヤプノフ関数として扱うことができる. 式 (A.2) より, もし状態が領域 Σ_j に位置しているのならば, 任意の制御ベクトル u_j は

$$u_j = - \sum_{i=1, i \neq j}^{m+1} \frac{\psi_i}{\psi_j} u_i = - \sum_{i=1, i \neq j}^{m-1} \gamma_i u_i \quad (\text{A.4})$$

として表される. 以下, $m = 2$ の場合で Σ_1 領域に状態がいる場合を考える.

提案手法により, 制御則は

$$u = g(\sigma) \sum_{i=1}^3 h_i u_i = \begin{cases} g(\sigma) u_j, & \sigma \in \Sigma_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

ここで $\sum_{i=1}^3 h_i = 1$ である. 簡略化のために

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \quad K_1 = \begin{bmatrix} k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_1 = g(\sigma) \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^T$$

とおく.

これより

$$\dot{\sigma} = V_1 \lambda_1 \quad \beta = b^T \Lambda_1$$

$$u_1 = -V_1 \Gamma_1 \quad u = V_1 H_1 - h_1 V_1 \Gamma_1$$

$$\sum_{i=1}^3 h_i = 1 \quad \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} = -V_1 K_1 + k_1 V_1 \Gamma_1 \quad (\text{A.6})$$

が得られる. いま

$$\dot{\sigma} = V_1 \dot{\Lambda}_1 \quad (\text{A.7})$$

より

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_1 &= V_1^{-1} \dot{\sigma} = V_1^{-1} (\mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + u) \\ &= V_1^{-1} (-V_1 K_1 + k_1 V_1 \Gamma_1 + V_1 H_1 - h_1 V_1 \Gamma_1) \\ &= -K_1 + k_1 \Gamma_1 + H_1 - h_1 \Gamma_1 \\ &= - \begin{bmatrix} k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} - h_1 \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式 (A.6) より

$$\dot{\beta} = b^T \dot{\Lambda}_1 = \dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 \quad (\text{A.8})$$

であるから,

$$\dot{\beta} = -\xi + 1 - (h_1 - k_1) \left(1 + \sum_{i=2}^3 \gamma_i \right) \quad (\text{A.9})$$

式 (A.5) より, $u = g(\sigma) \sum_{i=1}^3 h_i u_i = g(\sigma) u_1$ であり, $\sum_{i=1}^3 h_i = 1$ であるから, これより $h_1 = 1, h_2 = 0, h_3 = 0$ が導かれる. 従って, 式 (A.9) は

$$\dot{\beta} = -(1 - \xi) - (1 - k_1) \left(1 + \sum_{i=2}^3 \gamma_i \right) \quad (\text{A.10})$$

と書くことができ, これは全ての \mathbf{x} に対して成立する. 従って, $\dot{\beta} < 0$ により提案手法は全領域に対して漸近安定であることが示された.